

Le Modèle de Performance Positive Absolue

Fabrice Aaron TAHAR
Docteur en Sciences Economiques
du laboratoire de Théorie Economique Modélisation et Applications
Université de Cergy-Pontoise

Roger Meyer CHAOUAT
Agent Général AXA Prévoyance et Patrimoine

3 octobre 2006

Pendant longtemps la gestion d'actifs financiers a été considérée comme une activité ne relevant pas d'une discipline scientifique.

En effet, elle était confiée à des spécialistes, plus ou moins reconnus, qui selon leurs intuitions sur l'avenir des marchés intervenaient pour le compte de leurs clients qui ne pouvaient que constater les résultats en fin de période.

Cependant les années 1980 ont vu le couronnement de ce qui était qualifié à l'époque de "théorie moderne du portefeuille" et ce sous l'impulsion d'un grand nombre d'études académiques.

Cette théorie repose essentiellement sur les concepts de rationalité de l'individu (dont la formalisation est due à Von Neuman et Morgenstern) et d'efficience des marchés (notion associée aux noms de Cowles puis Fama). Sa pièce maîtresse est le "modèle d'équilibre des actifs financiers" (ou MEDAF), attribué à Sharpe et Markowitz (tous deux prix Nobel d'économie 1990) et testé avec un spectaculaire succès par Black, Jensen et Scholes (prix Nobel d'économie 1997) puis par Fama et MacBeth.

Aujourd'hui l'industrie bancaire, les métiers de l'assurance et les gestionnaires d'actifs du monde entier font appel à des mathématiciens, des probabilistes, des statisticiens-économètres et des informaticiens pour déterminer quelle peut être la façon optimale d'investir des capitaux, dans un laps de temps plus ou moins long, pour un couple rentabilité/risque maîtrisé.

On peut donc désormais partir du principe que la gestion d'actifs financiers peut et doit être considérée comme une discipline noble au même titre que la physique ou la médecine.

Forts de ces constats, nous estimons que la gestion d'actifs doit respecter un certain nombre de principes scientifiquement reconnus dont le principal est qu'il est désormais possible (et donc à notre sens obligatoire) d'apporter à nos clients la possibilité de bénéficier d'un modèle de performance positive absolue (le MOPPA) en créant un mode d'investissement que nous avons

baptisé "bouclier financier". Cette méthode a pour particularité de garantir un gain minimum certain (donc d'éliminer toute zone de perte) tout en se laissant la possibilité de profiter des opportunités des marchés.

Notre démarche est donc claire : il faut cesser cette pratique commune à un trop grand nombre d'établissements financiers qui consiste à laisser le client supporter tout le risque qui découle des prises de décisions de leurs gérants de portefeuilles alors que nous avons aujourd'hui tous les outils techniques pour qu'il en soit autrement.

En d'autres termes, il faut transformer l'obligation de moyens en obligations de résultats.

Pourquoi donc accepter que ces établissements financiers vous ponctionnent jusqu'à parfois 3% de votre capital chaque année (sans compter les frais d'entrée) tout en sachant que leurs décisions en matière d'investissement sont trop souvent hasardeuses lorsqu'elles sont comparées à la performance du marché pris dans son ensemble.

1 La Gestion Indicielle

Les nombreuses études de performance disponibles à ce jour sont unanimes : en moyenne, les gestionnaires des fonds commercialisés par les grandes banques ne sont pas en mesure d'offrir une performance de long terme supérieure à celle de leur indice de référence étant, par définition, la représentation la plus fidèle possible de l'état global d'un marché.

Sur cinq ans, les proportions des fonds actions américaines battus par le S&P 500 étaient de 62,9 % fin septembre 2002, de 62,2 % fin décembre 2002, de 60,2 % fin mars 2003, de 56,8 % fin juin 2003, de 53,4 % fin septembre 2003 et de 53,2 % fin décembre 2003.

En France, toujours sur cinq ans, les proportions des fonds actions battus par le CAC 40 (dividendes réinvestis) étaient respectivement pour les mêmes périodes de 73,8 %, 80,4 %, 69,9 %, 76 %, 77,8 % et de 68,1 %.

Certes, des gérants peuvent battre ponctuellement leur indice de référence, autrement dit faire mieux que le marché. Mais on peut remarquer que ce sont rarement les mêmes d'une année sur l'autre.

En effet, les spécialistes de la sélection de gérants internationaux, rappellent ainsi que, sur les fonds de la "zone Euro" qui avaient réussi des performances supérieures à la moyenne sur la période 1998-2000, plus de la moitié (54,3 %) ont affiché, les deux années suivantes, des résultats inférieurs à la moyenne.

Ces constats empiriques ont donné lieu depuis la fin des années 70 à des études scientifiques très poussées (certaines ont même permis d'obtenir des prix Nobel en sciences économiques). Selon elles, le marché serait efficient c'est-à-dire que l'ensemble des investisseurs possède, à tout moment, les mêmes informations sur les sociétés. Ces informations sont intégrées im-

médiatement dans les cours, d'où un ajustement permanent, spécialement pour les grandes sociétés cotées. Certains acteurs mieux informés que les autres peuvent, certes, dégager des gains supplémentaires mais la probabilité d'y parvenir régulièrement est extrêmement faible. Sur le long terme, il est donc difficile, voire impossible, de battre la moyenne des cours. En d'autres termes, quelle que soit l'habileté des gérants de portefeuille, la capacité des analystes financiers à élaborer des prévisions sur les cours boursiers, et des économistes à déterminer des anticipations sur la conjoncture, l'efficacité des marchés implique que la performance d'un portefeuille géré activement en utilisant ces prévisions ne sera pas meilleure que celle d'un indice représentatif du marché autrement que par hasard.

D'où l'intérêt de mettre en place une stratégie de gestion indicielle en reproduisant le couple rentabilité/risque d'un indice de référence à l'aide de techniques quantitatives qui permettent d'avoir des portefeuilles bien diversifiés sans qu'il soit nécessaire de réaliser une étude titre par titre, comme c'est le cas pour la gestion active.

Cette stratégie s'inscrit donc dans une logique de gestion "passive" puisqu'elle exclut toute subjectivité du gérant tout en permettant une bonne diversification des placements, éventuellement entre plusieurs catégories d'actifs (bons du Trésor, obligations et actions) et plusieurs zones géographiques, et ainsi d'obtenir, sur de longues périodes, un rendement fiable et régulier puisqu'elle en atténue les fluctuations.

En conséquence, la meilleure attitude à adopter pour utiliser, au mieux, vos ressources financières disponibles, est de se séparer des gérants actifs et des analystes financiers, et de chercher à reproduire mécaniquement le comportement d'un indice de marché, c'est-à-dire de remplacer les hommes par des machines que nous piloterons pour vous.

Toutes les études sérieuses démontrent que, sur une période d'au moins cinq ans, les résultats de la gestion indicielle sont en tête des classements et, surtout, de façon régulière. La performance de la gestion indicielle n'est jamais la première du tableau, car il s'agit d'une moyenne de performances réalisées sur les valeurs composant un indice de référence et, pour les mêmes raisons, jamais la dernière. Dans le cadre, par exemple, d'un PEA (cinq ans de détention) ou d'une diversification par le choix d'unités de compte actions d'un contrat multisupport d'assurance vie (huit ans de détention), la gestion indicielle se révèle donc parfaitement adaptée.

La gestion indicielle ne risque donc pas de véritablement décevoir. Elle prend tout doucement ses marques en France où seuls 3 à 5 % du marché sont gérés en indiciel.

Les banques ont bien compris qu'il y a dans la gestion indicielle un formidable marché à conquérir en commercialisant des trackers. Ces produits sont bien évidemment assortis de commissions de gestion qui, à long terme, peuvent atteindre des montants non négligeables (presque 10% du portefeuille pour un horizon de placement de 15 ans).

La question est de savoir comment répliquer pour vous un indice sans avoir à détenir tous les titres qui le composent (ils peuvent être des milliers comme pour le célèbre indice des valeurs technologiques américaines Nasdaq) à savoir en sélectionnant un faible nombre de titres (généralement entre 10 et 20) ?

Bien que ces problèmes d'optimisation soient souvent faciles à définir, ils sont généralement très difficiles à résoudre.

Ces problèmes de réplication d'indice ont fait l'objet d'études scientifiques parmi lesquelles celle de Fabrice TAHAR, Docteur en Sciences Economiques d'un des meilleurs laboratoires français de recherche en modélisation économique appliquée à la gestion financière (THEMA) et gérant de fonds de notre société¹.

Nous proposons donc d'utiliser les derniers outils scientifiques les plus élaborés développés en recherche opérationnelle et en intelligence artificielle. En effet, depuis une dizaine d'années, des progrès importants ont été réalisés en économétrie de la finance et avec l'apparition d'une nouvelle génération de méthodes approchées puissantes et générales représentées essentiellement par les méthodes de voisinage, et les algorithmes évolutifs comme les algorithmes génétiques et les stratégies d'évolution. Grâce à ces techniques et à l'augmentation fulgurante de la puissance de calcul des ordinateurs, on peut proposer, aujourd'hui, des solutions pour des problèmes d'optimisation classiques de grande taille qu'il était impossible de traiter il y a à peine quelques années.

¹Cette thèse soutenue à l'université de Cergy-Pontoise en décembre 2005 intitulée : "Eléments de gestion de portefeuille : analyse et extensions de méthodes en gestion indiciaire et garantie" est disponible sur le lien suivant :

<http://f.tahar.ifrance.com/these.pdf>

Elle a fait l'objet de plusieurs publications dans des revues internationales spécialisées en finance de marché :

- Optimal portfolios with guarantee at maturity computation and comparison : paru dans International Journal of Business Volume 11 Number 2 Spring 2006.

<http://f.tahar.ifrance.com/publications/OBPIextended.pdf>

- CPPI with stochastic rates : Chapitre d'un livre bientôt édité par Wilmott (Wiley).

<http://f.tahar.ifrance.com/publications/cppistochasticrate.pdf>

- CPPI with cushion insurance : à paraître dans Journal of Asset Management.

<http://f.tahar.ifrance.com/publications/cppici.pdf>

- Gestion indiciaire : Le Threshold Accepting Algorithm : à paraître dans Banque et Marchés

2 L'Assurance de Portefeuille

Quelque soit la technique utilisée, lorsque une stratégie de gestion indiciaire est adoptée, les fluctuations de court et moyen terme peuvent être très douloureuses comme en témoigne la chute du CAC 40 de près de 70 % entre septembre 2000 et mars 2003. Cette chute peut effrayer certains investisseurs qui ne peuvent pas se permettre de bloquer leur capital sur de longues périodes et ainsi bénéficier pleinement des avantages théoriques d'une telle stratégie.

Heureusement, la solution existe ; il y en a même plusieurs. L'investisseur peut adopter des méthodes de *gestion garantie* pour couvrir la valeur d'un portefeuille d'actions contre une baisse des cours, en vendant des contrats à terme sur des supports bien corrélés avec le portefeuille. L'objectif de la couverture est de bloquer la valeur du portefeuille à la valeur des contrats vendus (cours à terme) dans le meilleur des cas, ou plus fréquemment de cibler une valeur.

Il est aussi possible de couvrir certains portefeuilles avec des options (méthode OBPI pour *Option Based Portfolio Insurance*). Celles-ci permettent de profiter d'une évolution favorable des cours, au prix d'une protection plus coûteuse. L'achat d'un put qui donne le droit, mais non l'obligation, de vendre le support sous-jacent, à un prix convenu d'avance, a pour effet de fixer un prix de vente minimum au portefeuille, ou une valeur plancher, tout en lui permettant de s'apprécier en cas de hausse des cours.

Un gérant de portefeuille peut donc se couvrir en achetant des options directement sur le marché. Cependant, les options négociées sur la place de Paris ont très souvent des échéances trop rapprochées et sont de type américain donc plus chères que les options de type européen qui suffiraient à garantir un plancher.

Le gérant sera alors contraint de recréer synthétiquement des options qui conviennent davantage à ses objectifs.

Une autre solution : la méthode dite du coussin (ou CPPI pour *Constant Proportions Portfolio Insurance*). Cette stratégie consiste, en pratique, à toujours investir dans le portefeuille indiciaire un multiple constant du coussin qui n'est autre que le montant que l'on peut perdre sans mettre en jeu la garantie : ainsi pour une garantie en capital à un an, le coussin correspond initialement aux intérêts de l'année. La méthode du coussin est facile à comprendre et flexible. Elle indique au gérant quand intervenir, quel montant négocier et comment la position est affectée par la négociation. Dans ce cas, l'assurance de portefeuille consiste à réduire automatiquement l'exposition au risque par la vente d'actions (ou d'un panier d'actions) et à accroître la position en actif sans risque, dès que le marché baisse d'une proportion prédéterminée. Le but est de protéger le portefeuille de chutes ultérieures des cours, tout en maintenant la possibilité de profiter de hausses.

Elle permet également d'envisager que la garantie soit remise à niveau

régulièrement, par exemple une fois par an. Ainsi, au bout d'un an, si le portefeuille se valorise, la garantie suivante peut incorporer les plus-values acquises. La garantie prendrait alors la forme d'un processus à "cliquet".

L'assurance de portefeuille répond donc à un double objectif pour une échéance déterminée : garantir un niveau plancher pour le capital déposé (en cas de baisse voire krach du marché actions) et récupérer le maximum possible de la hausse du marché si celui-ci monte.

Cette philosophie de placement cherche donc à concilier deux objectifs contradictoires : limiter les pertes en cas de baisse du marché (en assurant un revenu minimal) et profiter des hausses boursières.

Exemple : 85.8 % du capital placés à 4 % restitueront le capital de base augmenté de 2.5% par an au bout de dix ans (on récupère donc 128 % du capital au terme des dix ans). Les 14.2 % restants en début de période sont affectés à la composante risquée c'est-à-dire investis sur l'indice avec un effet de levier modulable suivant les périodes.

Pour garantir la restitution du capital augmenté des 2.5 % par an, nous pouvons investir les fonds reçus dans des produits de taux, le plus souvent des obligations à coupon zéro ou des parts de fonds en euro dont les revenus seront capitalisés.

La technique de gestion utilisée ici permettant de capter les hausses en cours de vie du produit est celle du coussin : en fonction de l'environnement de marché, le gestionnaire augmentera ou diminuera la part d'actifs risqués au sein du portefeuille.

Particuliers prudents ou trésoriers avisés peuvent ainsi profiter en toute efficacité du confort du coussin.

Cette méthode a été popularisée par Perold (1986) puis Black et Jones (1987) et fait partie des techniques d'assurance avec plancher. Elle consiste à rebalancer entre actifs certain et risqué en suivant un mécanisme basé sur deux principes :

- la valeur du portefeuille est constamment maintenue au-dessus d'un niveau minimum appelé plancher. Le plancher croît au taux sans risque afin d'atteindre la valeur garantie à l'échéance du contrat. La différence entre ce plancher et la valeur effective du portefeuille constitue un surplus appelé coussin.

- l'exposition au marché à chaque instant est déterminée par une fonction non décroissante du coussin (généralement un multiple constant du coussin). Plus le multiple est élevé, plus l'investisseur profitera d'une hausse de S ou se rapprochera du plancher s'il baisse. Si le coussin devient très petit, l'exposition le sera également ce qui, en temps continu, empêche la valeur du portefeuille de passer sous le plancher (sauf en cas de saut négatif de S).

Le premier principe assure la garantie, alors que le deuxième détermine la performance du portefeuille.

Le mécanisme du coussin est donc bien conçu. Soit l'exposition porte ses fruits, soit, quand le cours de l'actif risqué baisse, le coussin tend vers zéro,

et on vient buter sur le plancher. Le portefeuille est alors entièrement investi en actif non risqué.

Par conséquent, en l'absence de sauts dans la dynamique de l'actif support S et en rebalçant le portefeuille en temps continu, cette méthode garantit le fait que la valeur du portefeuille est toujours au-dessus d'un plancher minimum.

Supposons qu'un gérant alloue ses fonds de 100 millions d'euros dans des actions et dans des bons du Trésor. Il veut fixer une valeur plancher de 128 M€ dans 10 ans ce qui correspond à capitaliser l'intégralité du capital de départ à 2.5% par an.

Supposons également que le rendement annuel des bons du Trésor à 10 ans soit de 4%. Il faut donc investir aujourd'hui 85.8 M€ ($128 * \exp(-0.04 * 10) = 85.8$) en bons du Trésor.

La différence entre la valeur initiale du portefeuille de 100 M€ et la valeur actualisée du plancher au terme des 10 ans (85.8 M€) constitue un coussin de 14.2 M€ qui sera investi en actions. C'est la partie du portefeuille exposée au risque du marché. L'inconvénient de cette solution est que, dans ce cas, l'espérance de rentabilité du portefeuille est limitée.

Pour accroître l'exposition au risque, notée E , du portefeuille, il faudrait investir en actions une somme E supérieure au coussin, noté C .

La méthode du coussin consiste à fixer simultanément un multiplicateur et un seuil de tolérance qui déclenche un réajustement de la position détenue :

- Le gérant se fixe un multiplicateur m et investit en actions une somme égale à m fois le coussin :

$$E_t = m \times C_t.$$

- Le gérant se fixe un seuil de tolérance (entre 1 et 5 % en général), qui est un pourcentage de variation maximum des cours tel que, dès que ce pourcentage est atteint, le montant investi en actions est réajusté au multiple fixé du coussin.

A chaque réajustement, le plancher est augmenté de l'intérêt sans risque calculé depuis le dernier réajustement.

- Exemple basique de la stratégie du coussin

On reprend l'exemple du gérant qui dispose de 100 M€ et qui se fixe un plancher à 128 M€ dans 10 ans. Nous avons calculé qu'il détient un coussin initial de 14.2 M€. On suppose qu'il se fixe un multiplicateur de 3 et un seuil de tolérance de 5%.

Un multiplicateur de 3 le conduit à un investissement de 42.6 M€ dans un portefeuille d'actions qui duplique l'indice, et le reste, 57.4 M€, en bons du Trésor.

Présentons le mécanisme de réajustement sur 10 semaines et regroupons les valeurs dans le tableau 1 (hors frais de réajustement).

Supposons que les cours de l'indice soient montés de 5% au bout de 2 semaines et que le taux d'intérêt soit de 4%. La limite supérieure de réajustement est atteinte.

L'indice passe à 5250, la valeur de la poche actions à 44.73 M€ ($= 42.6 \times 1.05$ M€) et la valeur des bons du Trésor à 57.49 M€ ($= 57.4 \times \exp(0.04/26)$ M€).

La nouvelle valeur du portefeuille est à : 102.22 M€ ($= 44.73 + 57.49$).

Le plancher est augmenté de l'intérêt calculé sur 2 semaines. Il passe à : $85.8 \times \exp(0.04/26) = 85.93$ M€.

Le coussin vaut alors : $(102.22 - 85.93) = 16.29$ et la nouvelle somme investie en actions est multipliée par 3, soit : $16.29 \times 3 = 48.87$.

Parce que la valeur de l'indice est montée, l'investissement en actions a été accru. Cet accroissement de 4.14 M€ est financé par la vente de bons du Trésor pour le même montant de 4.14 M€. La nouvelle valeur investie en bons du Trésor est de $57.49 - 4.14 = 53.35$ M€.

Supposons que pendant deux semaines l'indice varie dans l'intervalle de tolérance (+/- 5% autour de 5250) et passe brusquement le dernier jour à 4935 (-6%). La valeur de la poche actions a diminué à 46.91 M€ et celle des bons du Trésor est passée à 53.43 M€ $= 53.35 \times \exp(0.04/26)$. La valeur du portefeuille est donc de : 100.34 M€ ($= 46.91 + 53.43$).

A chaque négociation le plancher est augmenté de l'intérêt sur la période écoulée depuis le dernier réajustement.

Le plancher est réajusté à 86.06 M€ $= 85.93 \times \exp(0.04/26)$.

Le nouveau coussin est de : $(100.34 - 86.06) = 14.28$ M€. Une partie des actions est vendue pour atteindre une valeur égale à 3 fois le coussin : $14.28 \times 3 = 42.84$ M€.

Le prix de vente des actions, de 4.07 M€ est investie en bons du Trésor qui voient leur valeur passer à 57.5 M€ ($= 53.43 + 4.07$).

Supposons que l'indice baisse fortement et atteigne au minimum la limite à la baisse de -5%, toutes les deux semaines. Le portefeuille est réajusté. Le processus continue dans le tableau 1.

A la fin de la dixième semaine, la valeur du portefeuille est de 93.34 (hors frais de réajustement). Il a perdu 6.66% de sa valeur. La somme investie en actions est passée de 42.6 M€ au départ à 20.67 M€, soit une baisse de 51.48% de la poche investie en actions pour une chute de l'indice de 20.67%. Le portefeuille a beaucoup moins chuté que l'indice.

Remarques :

La valeur du portefeuille s'apprécie à la hausse d'autant plus vite que le multiple est élevé, mais il atteint aussi plus vite le plancher en cas de baisse ; il perd aussi plus de valeur quand les prix varient fréquemment.

Quand le coussin tend vers zéro, il en est de même de l'exposition au risque. C'est la raison pour laquelle la valeur du portefeuille ne descend pas en dessous de la valeur plancher, sauf en cas de forte chute des cours sans intervention possible pendant la chute.

Cours Indice	Valeur (M€) Portefeuille	Plancher (M€)	Coussin (M€)	Valeur (M€) Poche actions	Valeur (M€) Bons du Trésor
5000	100	85.8	14.2	42.6	57.4
5250	102.22	85.8		44.73	57.49
	réajustement	(+0.13)		(+4.14)	(-4.14)
	102.22	85.93	16.29	48.87	53.35
4935	100.34	85.93		46.91	53.43
	réajustement	(+0.13)		(-4.07)	(+4.07)
	100.34	86.06	14.28	42.84	57.5
4688.3	98.28	86.06		40.7	57.59
	réajustement	(+0.13)		(-4.41)	(+4.41)
	98.28	86.19	12.09	36.28	62
4407	96.2	86.19		34.1	62.09
	réajustement	(+0.13)		(-4.46)	(+4.46)
	96.2	86.32	9.88	29.64	66.56
3966.3	93.34	86.32		26.67	66.66
	réajustement	(+0.13)		(-6)	(+6)
	93.34	86.45	6.89	20.67	72.66

TAB. 1 – Ajustement d'un portefeuille par la méthode du coussin : $m=5$;
seuil de tolérance : $\pm 5\%$.

Lorsque le coussin atteint une valeur telle que tout le portefeuille est investi en action, le portefeuille n'est plus modifié, tant que le coussin conduit à un investissement de 100% en actions. Si le seuil de tolérance est faible, il faut intervenir plus souvent.

La valeur d'un portefeuille géré selon la méthode du coussin dépend essentiellement des variations de l'indice et du nombre de réajustements, nombre qui dépend lui-même de la volatilité du marché. Si celle-ci est élevée, la valeur du portefeuille peut atteindre la valeur plancher, même si à la fin de la période l'indice est au même niveau qu'au début.

L'avantage de cette stratégie est que nous pouvons choisir le coussin initial, le multiple et le seuil de tolérance tout en nous laissant la possibilité de les modifier n'importe quand.

Nous avons supposé que le portefeuille était investi en actions et en bons du Trésor. Nous aurions pu aussi le partager entre actions et obligations, la partie obligations étant moins risquée (actif de réserve) que la partie actions (actif risqué). L'actif de réserve doit procurer un taux de rendement minimum acceptable.

En résumé nous proposons à nos clients d'élaborer un portefeuille indicel issu d'un modèle économétrique ou d'une optimisation via le Threshold Accepting Algorithm puis de garantir un plancher assurant un gain minimum de 1,5% en moyenne annuelle (commission de gestion de 1% comprises) sur une échéance de 8 à 10 ans par la méthode du coussin que nous avons modifiée.

Nous adoptons en effet une gestions active du multiple m ce qui permet d'avoir une exposition au risque variable et évolutive suivant les conditions de marché en ajustant de façon régulière et dynamique des actifs risqués (un panier d'actions dupliquant un indice) et des actifs non risqués (bons du Trésor ou parts de fonds monétaire).

Dans le cas où l'indice commence par baisser fortement, le coussin devient nul et le portefeuille garanti est entièrement investi en actif refuge ce qui retire toute chance de pouvoir profiter d'une éventuelle hausse à venir.

On peut alors imaginer une solution qui serait de vendre l'intégralité du portefeuille à sa valeur liquidative et de réinitier un processus d'investissement suivant le MOPPA sur une nouvelle période de huit ans. Bien sur la garantie absolue de 1.5% par an ne tiendrait plus mais la valeur liquidative est garantie d'être supérieure ou égale à la valeur du plancher à la date considérée.

3 Le MOPPA : Application et simulations

Les résultats théoriques obtenus (voir annexe scientifique) sont là pour nous donner un cadre de réflexion dans lequel nous allons pouvoir introduire certaines modifications afin de coller aux réalités du marché :

- Introduction des coûts de transaction :

A chaque rebalancement entre le support risqué et le support qui constitue la garantie il faut prendre en compte les coûts de transaction. Dans nos simulations nous supposons qu'il représentent 0.3% du montant traité.

- Mise en place d'un effet cliquet sur le plancher :

Lorsque la valeur du portefeuille a pu augmenter d'une proportion jugée satisfaisante, on déclenche un effet cliquet qui fait passer une partie du coussin dans le plancher. On peut ainsi sécuriser une partie des gains et donc augmenter la garantie à l'échéance. En ce qui concerne les simulations, nous avons choisi de déclencher l'effet cliquet lorsque la valeur du coussin représente la moitié de celle du plancher.

- Nous proposons une gestion DPI (Dynamic Portfolio Insurance) qui consiste à modifier la valeur du multiple m suivant un indicateur de tendance qui nous alerte lorsque le marché alterne entre phase de tendance ou de trading range : ceci nous permet de diminuer (augmenter) le multiple lorsque l'indice entre dans une tendance baissière (haussière).

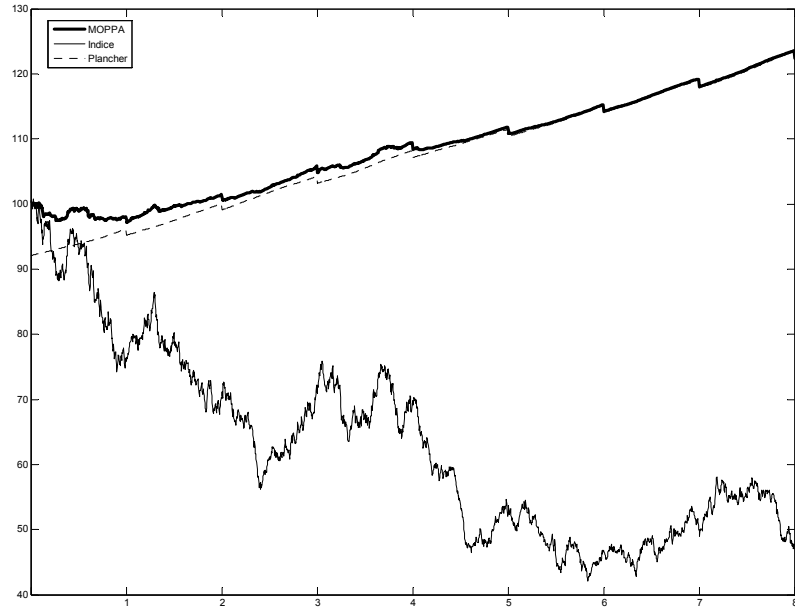
- Tolérance vis-à-vis des fluctuations de l'indice :

En théorie la méthode du coussin suppose un rebalancement continu entre l'actif risqué et l'actif assurant la garantie. En réalité cette condition ne peut être respectée puisque même les cotations des titres les plus liquides sont faites en temps discret et surtout parce que les coûts de transactions deviendraient extrêmement élevés. On peut cependant définir une tolérance aux fluctuations de l'indice, c'est-à-dire un pourcentage de variations à la hausse et à la baisse au-delà duquel nous allons opérer les transactions afin de conserver la relation $E_t = mC_t$.

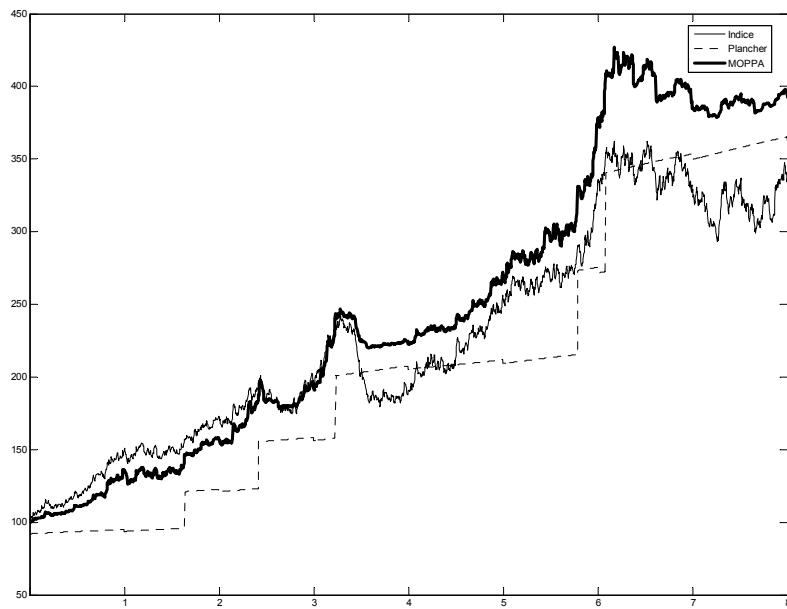
Cette tolérance peut être fixe ou évoluer comme une fonction de la volatilité du marché.

Dans nos simulations nous fixons la tolérance à 5%. Cette approche correspond à définir un processus ponctuels marqué (*marked point process*) défini à partir de la trajectoire de l'indice et à rebalancer lorsque ce processus change de niveau.

Voici les résultats de l'application du MOPPA sur deux trajectoires typiques en incluant des frais de gestion annuels de 1% (qui correspondent aux baisses du plancher chaque début d'année).

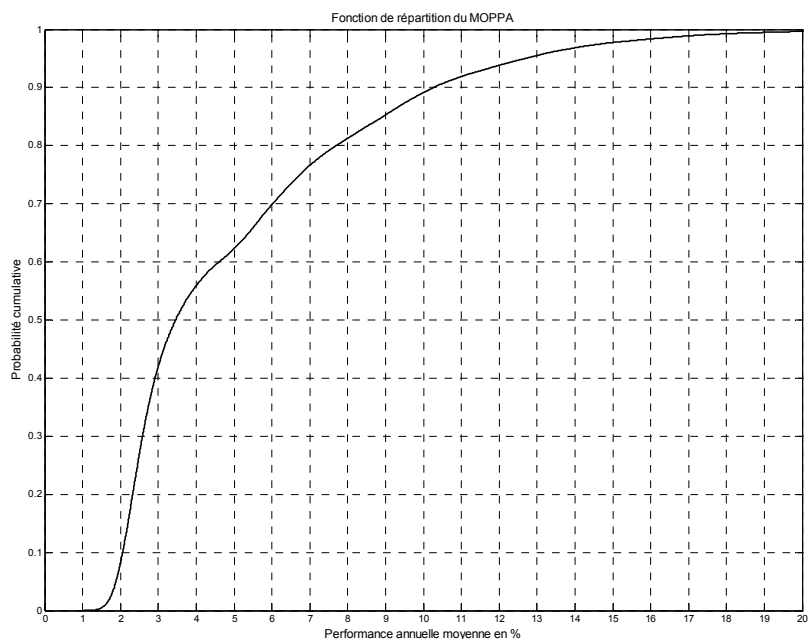


Marché baissier



Marché haussier

Nous avons simulé 100000 trajectoires de l'indice et du MOPPA dont voici les résultats :



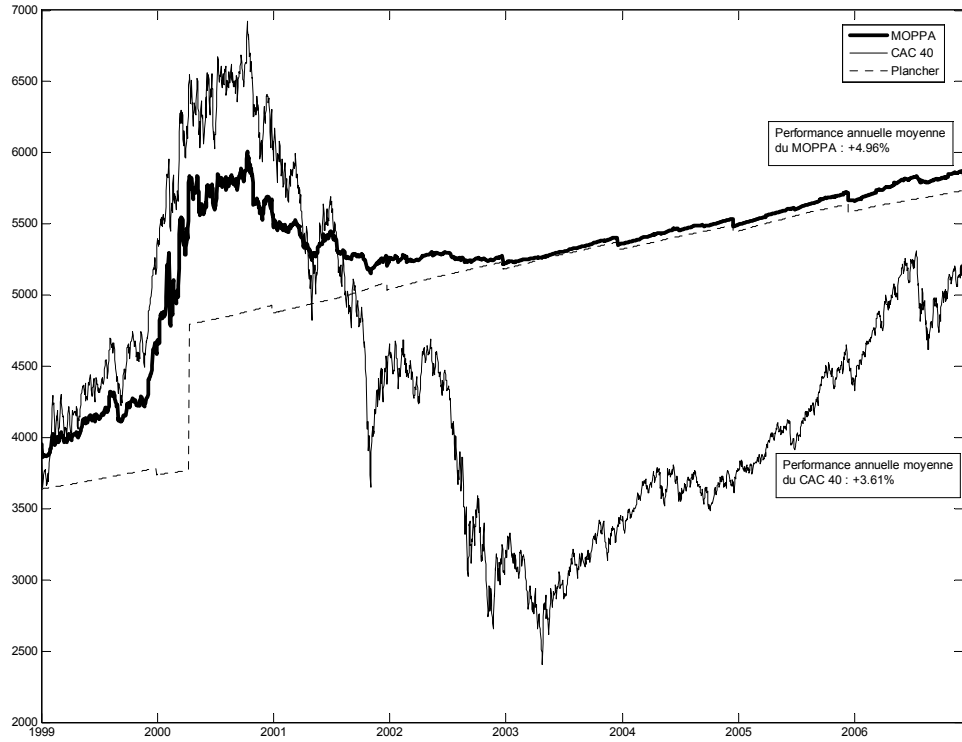
Résultats sur 100000 simulations

Ce graphique nous montre que nous sommes certains de garantir une performance annuelle moyenne d'au moins 1.5%.

Nous avons 50% de chance d'obtenir une performance moyenne annuelle comprise entre 1.5% et 3.5%.

Nous avons également 30% de chance d'obtenir une performance moyenne annuelle supérieure à 6%, 20% de chance d'être au-dessus de 8% et 10% de chance au dessus 10%.

Voici les résultats de l'application du MOPPA sur les huit dernières années du CAC40 (du 01/01/1999 au 29/09/2006) en incluant des frais de gestion annuels de 1% :



4 Annexe Scientifique

4.1 Choix de la modélisation des actifs

L'indice S est modélisé par un mouvement brownien géométrique standard :

$$S_t = S_0 \cdot e^{[(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2)t + \sigma_S W_t]}$$

où :

- μ_S est un terme général de tendance permettant de prendre en compte la dérive dans le temps de l'indice. Elle représente l'espérance mathématique du changement instantané de S_t .

- σ_S représente la volatilité ou l'écart-type du changement instantané de l'indice. Ce coefficient mesure la réponse du changement de S_t au choc aléatoire provoqué par le brownien.

- W est un mouvement brownien (ou marche aléatoire à accroissements gaussiens dit encore "processus de Wiener"). Il permet de formaliser les effets de la source unique d'incertitude : celle qui est liée aux variations non anticipées de S_t .

En ce qui concerne la modélisation du taux d'intérêt à court terme et dans la perspective qui nous concerne ici, à savoir l'étude d'une stratégie d'assurance de portefeuille avec taux stochastique, nous nous limitons à un modèle à un seul facteur.

Différentes spécifications des processus du taux spot sont envisagées dans les modèles de taux à un facteur. Chaque type de processus conduit à une forme particulière d'équation de valorisation du prix des obligations et, par conséquent, à une structure par terme des taux spécifique.

Nous avons choisi d'utiliser la modélisation proposée par Cox, Ingersoll et Ross (CIR).

Le processus retenu est le suivant :

$$dr_t = \kappa(\theta - r)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW.$$

L'idée dans ce modèle est qu'il existe une valeur normale de longue période θ et qu'une force de rappel tend à ramener le taux observé vers cette valeur à la vitesse κ .

Le taux peut fluctuer autour d'une valeur moyenne de façon aléatoire. Si le taux à court terme r_t passe au-dessus du niveau de θ , alors l'espérance de la variation instantanée de r_t , $\kappa(\theta - r)$ est négative et r_t a tendance à se rapprocher de son niveau moyen à la vitesse κ .

L'actif refuge de type monétaire

Nous sommes supposé investir sur le marché monétaire (noté M) pour constituer la réserve nécessaire à l'obtention d'une garantie à échéance fixée. L'autre partie du capital est investie sur un portefeuille d'actifs "risqués" (noté S) dupliquant l'indice.

La période de temps considérée est $[0, T]$ et les stratégies étudiées sont auto-finançantes.

On suppose que le taux d'intérêt r satisfait la relation :

$$dr_t = \mu_{r_t} dt + \sigma_{r_t} dW_{r,t},$$

avec :

$$\mu_{r_t} = \kappa(\theta - r)$$

et :

$$\sigma_{r_t} = \sigma_r \sqrt{r_t}$$

où $W_{r,t}$ est un mouvement brownien standard.

La valeur de l'actif monétaire M évolue selon :

$$dM_t = M_t r_t dt.$$

Son cours vérifie donc :

$$M_t = M_0 e^{\int_0^t r_s ds}.$$

La dynamique de l'actif risqué S est donnée par la diffusion suivante :

$$dS_t = S_t [\mu_{S_t} dt + \sigma_{S_t} dW_t],$$

où W_t est également un mouvement brownien standard. Les deux mouvements browniens W et W_r peuvent être corrélés.

On suppose donc que :

$$W_t = \frac{\rho W_{r,t} + (1 - \rho) \widetilde{W}_t}{\sqrt{\rho^2 + (1 - \rho)^2}},$$

où \widetilde{W} est un mouvement brownien indépendant de W ($\widetilde{W} \perp W$) et $\rho < 0$, ce qui traduit bien la corrélation négative globalement observée entre le marché des actions et le taux d'intérêt à court terme.

4.2 La méthode du coussin avec taux stochastique

Elle consiste à gérer un portefeuille dynamique tel que sa valeur se situe toujours au-dessus d'un plancher P à chaque instant t .

Le plancher est supposé évoluer selon la même dynamique que l'actif monétaire :

$$dP_t = P_t r_t dt.$$

Le coussin représente la différence entre la valeur du portefeuille et le plancher. Sa valeur, à chaque instant t dans l'intervalle $[0, T]$, est donnée par :

$$C_t = V_t^{CPPI} - P_t.$$

On note toujours par E_t le niveau d'exposition sur l'actif risqué. La méthode du coussin consiste à fixer $E_t = mC_t$, où m est une constante appelée multiple.

1) *Choix du plancher* :

Le plancher à l'échéance du contrat doit être supérieur ou égal à une proportion p (qui peut être supérieure à 1) du capital de départ :

$$P_T = P_0 \cdot e^{\int_0^T r_s ds} \geq pV_0.$$

Cependant comme r_t est ici un processus stochastique, cette contrainte ne peut pas être satisfaite avec certitude (probabilité égale à 1). Il faut donc trouver, par exemple, la valeur initiale du plancher P_0 telle que $P_T \geq pV_0$ avec une probabilité élevée, c'est-à-dire telle que :

$$\mathbb{P} \left[P_0 \cdot e^{\int_0^T r_s ds} \geq pV_0 \right] \geq 1 - \varepsilon,$$

où $1 - \varepsilon$ correspond à un niveau de sécurité généralement supérieur à 95 %.

2) *Détermination de la valeur du portefeuille* :

Le portefeuille évolue selon :

$$dV_t = \frac{E_t}{S_t} dS_t + \frac{(V_t - E_t)}{M_t} dM_t,$$

avec $E_t = mC_t = m(V_t - P_t)$.

Nous calculons alors le coussin à l'aide de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} dC_t &= dV_t - dP_t \\ &= mC_t \left(\frac{dS_t}{S_t} \right) + (C_t + P_t - mC_t) \left(\frac{dM_t}{M_t} \right) - P_t r_t dt \\ &= C_t \left[m \frac{dS_t}{S_t} + (1 - m) r_t dt \right]. \end{aligned}$$

En intégrant et en remarquant que le coussin s'exprime comme une exponentielle de Doléans-Dade², nous avons :

$$C_t = C_0 \mathcal{E} \left(mX_t + (1 - m) \int_0^t r_s ds \right) \text{ avec } dS_t = S_t dX_t.$$

² Si $(Y_t)_t$ est une semi-martingale à trajectoires continues ($Y_t = Y_0 + A_t^Y + M_t^Y$) alors :

$$\mathcal{E}(Y_t) = \exp \left(A_t^Y + M_t^Y - \frac{1}{2} \langle M^Y, M^Y \rangle_t \right),$$

où $\langle M^Y, M^Y \rangle_t$ est le compensateur prévisible de la partie martingale M^Y de Y .

On peut donc réécrire l'expression du coussin à l'aide d'une exponentielle classique :

$$C_t = C_0 \text{Exp} \left[m X_t + (1 - m) \int_0^t r_s ds - \frac{1}{2} m^2 \langle M^X, M^X \rangle_t \right].$$

Dans le cas général où la tendance et la volatilité de l'indice ne sont pas constantes, la partie martingale de X_t est donnée par :

$$M_t^X = \int_0^t \sigma_{S_s} dW_s,$$

d'où :

$$d \langle M^X, M^X \rangle_t = \sigma_{S_t}^2 dt.$$

Proposition 1 *L'expression du coussin s'écrit donc :*

$$C_t = C_0 \text{Exp} \left[m \left(\underbrace{\int_0^t \mu_{S_s} ds + \int_0^t \sigma_{S_s} dW_s}_{X_t} \right) - \frac{1}{2} m^2 \int_0^t \sigma_{S_s}^2 ds \right] \\ \times \text{Exp} \left[(1 - m) \int_0^t r_s ds \right].$$

Nous pouvons alors donner l'expression de la valeur du portefeuille garanti :

$$V_t = C_t + P_0 e^{\int_0^t r_s ds}.$$

Corollaire 2 *Son espérance est donnée par :*

$$\mathbb{E}[V_t] = C_0 \mathbb{E} \left[\text{Exp} \left[\int_0^t r_s ds + m \left(\int_0^t \mu_{S_s} ds - \int_0^t r_s ds \right) \right] \right] + P_0 \mathbb{E} \left[e^{\int_0^t r_s ds} \right].$$

Remarque 3 *Si S suit un mouvement brownien géométrique, μ_{S_s} et σ_{S_s} sont constants et nous obtenons :*

$$V_t^{CPPI}(m, S_t) = P_0 e^{\int_0^t r_s ds} + \gamma_t \cdot S_t^m,$$

avec :

$$\gamma_t = \left(\frac{C_0}{S_0^m} \right) \exp[\delta_t t], \\ \delta_t = \frac{1}{t} \left((1 - m) \int_0^t r_s ds - \frac{1}{2} (m^2 - m) \sigma_S^2 t \right).$$